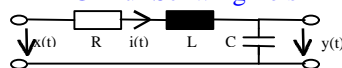
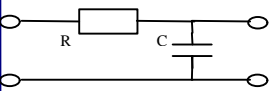
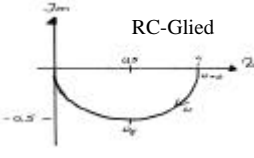
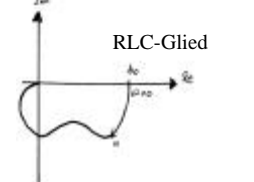


<p>DGL für Schwingkreis</p>  <p>homogene Lösung: $y_h(t) = e^{p_{1/2}t}$ $p_{1/2} = -J \cdot \omega_0 \pm \sqrt{J^2 - 1}$</p> <p>Schwingfall: $p_{1/2} = -\omega_0 \cdot J \pm j\omega_0 \sqrt{1 - J^2}$ $\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - J^2}$</p> <p>Gesamtlösung: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$</p>	$LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ $\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y}(t) + \frac{2J}{\omega_0} \dot{y}(t) + y(t) = b_0 x(t)$	<p>Resonanzkreisfrequenz</p> $\omega_{res} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot J^2}$	<p>Kennkreisfrequenz</p> $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ <p>Überschwingweite</p> $\ddot{u} = e^{-\frac{p \cdot J}{\sqrt{1 - J^2}}}$ <p>Dämpfungsgrad</p> $J = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$
<p>Sprungfunktion $s(t) \rightarrow$ Sprungantwort $a(t)$ Impulsfunktion $\delta(t) \rightarrow$ Impulsantwort $h(t)$</p> <p>$d(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ Def.: $d(t) = 0$ für $t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = 1$</p> <p>mit Amplitudenfaktor $A = \text{const.}$ $\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot d(t) dt = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = A$</p> <p>$x(t)$ sei begrenzt und in $t=0$ stetig</p> <p>$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot d(t-u) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0) \cdot d(t) \cdot dt = x(0)$</p> <p>Verschiebung Dirac-Impuls $x(t)$ in $t = u$ und $t = -u$ stetig</p> <p>$\int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot d(t-u) \cdot dt = x(u) \int_{-\infty}^{\infty} d(t-u) \cdot dt = x(u)$</p> <p>Ausblendeigenschaft Dirac-Impuls</p> <p>$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t) \cdot dt = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$ $h(t) = \frac{da(t)}{dt}$</p>	<p>Bsp.: Schwingkreis: $h(t) = s(t) \cdot e^{-\omega_0 J t} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - J^2}} \cdot \sin \omega_e t$</p> <p>Dirac-Impuls fällt an L ab, da dieses Element der Stromänderung den größten Widerstand entgegengesetzt.</p> <p>Ein Dirac-Impuls ist ein ideales mathematisches Testmittel, da die Ausgangsgröße $h(t)$ nur von der homogenen Lösung bestimmt wird und das Eingangssignal nicht in das Ergebnis einght wie z.B. bei der Spannungsantwort. Man erhält also das System in Reinform.</p> <p>Faltungintegral</p> <p>$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t-t) \cdot dt$ bzw. $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t) \cdot h(t) \cdot dt$</p> <p>Abkürzung: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$</p> <p>Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion</p> <p>$\int_{-\infty}^{\infty} d(t) \cdot h(t-t) \cdot dt = h(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot d(t-t) \cdot dt = h(t)$</p>		
<p>$s(t) = \int_{-\infty}^t d(t) \cdot dt$ $d(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ $a(t) = \int_{-\infty}^t h(t) \cdot dt$ $h(t) = \frac{da(t)}{dt}$</p> <p>Transf. in Komplex Frequenzgang</p> <p>$x(t) = A \cdot \cos \omega t$ $x(t) = A \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) = A \cdot e^{j\omega t}$</p> <p>$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$ $H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} \Big _{x(t) = e^{j\omega t}}$</p> <p>partikuläre Lsg. der DGL $y(t) = x(t) \cdot H(j\omega)$ $y(t)$ ist partikuläre Lösung für $x(t) = A \cdot e^{j\omega t}$</p> <p>Homogene Teillösung ist für endliche Zeiten abgeklungen da $x(t)$ vor unendlich langer Zeit eingeschaltet wurde.</p> <p>Hinweis: Für aufklingende homogene Teillösungen existiert das Integral nicht.</p>  <p>$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$</p> <p>Anwendung von $H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)}$ auf Systeme, die sich durch lineare DGL's mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen.</p> <p>(n) $a_n y(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$</p> <p>(m) $b_m x(t) + \dots + b_2 \ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t)$</p> <p>$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$</p> <p>$H(j\omega) = H(j\omega) \cdot e^{j\phi(j\omega)}$</p> <p>Bsp.: RLC-Glied $H(j\omega) = \frac{1}{LCj\omega^2 + RCj\omega + 1}$</p>	<p>Die Faltung</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Substitution bei Eingangsfunktion $t \rightarrow \tau$ 2) Spiegelung der Eingangsfunktion $\tau \rightarrow t - \tau$ 3) Verschiebung $-t \rightarrow t - \tau$ 4) Multiplikation mit $h(t)$ 5) Integration 6) Ergebnis <p>Rechteckfunktion gefaltet ergibt immer Dreieckfunktion</p> <p>Spezialfälle: 1) kausale Systeme</p> <p>$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ h_R & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ $y(t) = \int_0^t h_R(t) \cdot x(t-t) \cdot dt$</p> <p>$h(t) = s(t) \cdot h_R(t) \Big _{s(t) = 0 \text{ für } t < 0, s(t) = 1 \text{ für } t \geq 0}$</p> <p>$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) \cdot h_R(t-t) \cdot dt$</p> <hr/> <p>2) zusätzlich rechtsseitige Eingangssignale</p> <p>$x_R(t) = 1$ $y(t) = \int_0^t h_R(t) \cdot x_R(t-t) \cdot dt \Big y(t) = \int_0^t x_R(t) \cdot h_R(t-t) \cdot dt$</p> <hr/> <p>3) zusätzlich $x(t) = s(t) =$ Sprungfunktion</p> <p>$a(t) = y(t) = \int_0^t h_R(t) \cdot dt \Big a(t) = y(t) = \int_0^t h_R(t-t) \cdot dt$</p>  <p>RC-Glied $\omega = 0; H(0) = 1 \Big \omega \rightarrow \infty; H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC}$</p> <p>$H(j\omega) \rightarrow 0; \phi \rightarrow -90^\circ$</p> <p>$H(j\omega_E) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{2} (1 - j); \omega_E = \frac{1}{T}$</p>  <p>RLC-Glied $\omega = 0; H(j\omega) = b_0$</p> <p>$\omega \rightarrow \infty; H(j\omega) = \frac{b_0}{(j\omega/w_0)^2}$</p> <p>$H(j\omega) \rightarrow 0; \phi \rightarrow -180^\circ$</p>		

Fouriertransformation liefert Spektrum

$$F\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{Fouriertransformierte von } f$$

Umkehrung:

$$F^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

Faltungssatz

bekannt $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot x(t-t) \cdot dt$ allegemein $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t-t) \cdot dt = f_1(t) * f_2(t)$

Fouriert. \parallel Fouriert.

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \quad \text{H(j}\omega\text{)} = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}$$

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad \text{F(j}\omega\text{)} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$R(\omega)$ ist gerade Funktion, $X(\omega)$ ist ungerade Funktion in ω

Fouriertransformation reeller Zeitfunktionen

$f(t) = s(t)e^{-\frac{t}{T}}$ $f_g(t)$

$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$

$f_g(t) = \frac{1}{2} \cdot f(t) + \frac{1}{2} f(-t)$ $f_u(t)$

$f_u(t) = \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(-t)$

$F(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega)$

$F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$ gerade Funktion

$j(-\omega) = -j(\omega)$ ungerade Funktion

$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) \cdot \cos(\omega t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) \cdot dt$

$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$

$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

c) Gleichfunktion (2\pi)Fläche

$1 \leftrightarrow 2\pi \cdot d(\omega)$

d) Cosinus- und Sinusfunktion

$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow p \cdot (d(\omega - \omega_0) + d(\omega + \omega_0))$

$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{p}{j} \cdot (d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0))$

Umkehrung:

$\frac{1}{2} (d(t + t_0) + d(t - t_0)) \leftrightarrow \cos(\omega_0 t)$

$\frac{1}{2j} (d(t + t_0) - d(t - t_0)) \leftrightarrow \sin(\omega_0 t)$

Fouriertransformation einiger

a) $\delta(t) \leftrightarrow 1$ Dirac-Impuls

b) $rect\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$

$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F(j\omega) = T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Umkehrung von b)

$F(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) \leftrightarrow f(t) = \frac{1}{T} \cdot \text{si}\left(\frac{t \cdot \pi}{T}\right)$

Integrationstheorem

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + p d(\omega) \cdot F(0)$

Parseval'sches Theorem

$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

Idealer Bandpaß

$H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right) \quad h_T(t) = \frac{\Delta\omega}{2} \text{si}\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$

allgemein:

$h(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) \quad h(t) = h_T \cdot 2 \cos(\omega_0 t)$

Idealer Tiefpaß

$|H(\omega)| = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) \quad H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) e^{-j\omega t_0}$

$j(\omega) = -\omega \cdot t_0 \quad h(t) = \frac{\omega_g}{p} \cdot \text{si}(\omega_g(t - t_0))$

Impulsbreite $\Delta = \frac{p}{\omega_g}$ Bandbreite $B = 2\omega_g$ Anstiegszeit $T_a = \frac{p}{\omega_g} = \frac{1}{2f_g}$

Impulsdauer \cdot Bandbreite = const \Leftrightarrow gilt für jeden Tiefpaß

Blockschaltbildalgebra

RS: $x(j\omega) \rightarrow [H_1(j\omega)] \rightarrow [H_2(j\omega)] \rightarrow y(j\omega)$

$H(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$

Kreisstruktur:

+ Mitkopplung - Gegenkopplung

$H(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 \mp H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}$

hier:

- Mitkopplung + Gegenkopplung

PS:

$H(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = H_1(j\omega) \pm H_2(j\omega)$

-2-

<p>Laplace-Transformation</p> $L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \text{mit} \quad p = s + j\omega \quad s(t) \quad \text{Übertragungsfunktion}$ $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	
<p>Rücktransformation Zählergrad ≤ Nennergrad</p> $F(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} \quad F(p) = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$	<p>Partialbruchzerlegung</p> $F(p) = A_{\infty} + \sum_{n=1}^r \frac{A_n}{p - p_n} \quad A_{\infty} = \begin{cases} b_m & \text{für } m = n \\ a_n & \\ 0 & \text{für } m < n \end{cases}$ $A_n = \left\{ F(p) \cdot (p - p_{\infty n}) \right\}_{p=p_{\infty n}, n=1..n}$ $f(t) = s(t) \cdot A_1 \cdot e^{p_{\infty 1} t} + s(t) \cdot A_2 \cdot e^{p_{\infty 2} t} + \dots + s(t) \cdot A_n \cdot e^{p_{\infty n} t}$ $s(t) \cdot e^{p_{\infty} t} \quad \text{für } \text{Re}\{p\} > \text{Re}\{p_{\infty}\}$
<p>p_v seien einfache Nullstellen von $N(p)$</p> $F(p) = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_0}{a_n \cdot (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$	
<p>konjugiert komplexe Nullstellen von $N(p)$ F(p) siehe oben</p> $p_i = s_i + j\omega_i \quad p_{i+1} = s_i - j\omega_i = p_i^* \quad F_2(p) = \frac{A_i}{p - s_i - j\omega_i} + \frac{A_i^*}{p - s_i + j\omega_i} \quad \text{Rücktransformation} \quad f_2(t) = s(t) \cdot A_i \cdot e^{s_i t} \cdot 2 \cdot \cos(\omega_i t + j_i)$	
<p>zweifach reelle Nullstellen von $N(p)$</p> $F(p) = \frac{Z(p)}{a_n (p - p_i)^2 \prod_{n=1}^n (p - p_n)}$ $F(p) = A_{\infty} + \sum_{n=1}^n \frac{A_n}{(p - p_n)} + \frac{A_{i1}}{(p - p_i)} + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2}$ $F_M(p)$ $f(t) = A_1 \cdot s(t) \cdot e^{p_{\infty} t} + A_2 \cdot s(t) \cdot t \cdot e^{p_{\infty} t} + \dots + A_k \cdot s(t) \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{p_{\infty} t} + \tilde{f}(t)$ $A_i = \frac{1}{(k-i)!} \cdot \frac{d^{k-i}}{dp^{k-i}} \left\{ F(p) \cdot (p - p_{\infty})^k \right\}_{p=p_{\infty}, i=1..k}$	
<p>Pole-Nullstellen $m \leq n$</p> $H(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_1 p + a_0}$ <p>P_{0m} = Nullstellen von $Z(p)$, heißen Nullstellen von $H(p)$ \odot $P_{\infty v}$ = Nullstellen von $N(p)$, heißen Pole von $H(p)$ \times</p> $H(p) = \frac{b_m \cdot (p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{a_n \cdot (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \dots (p - p_{\infty n})}$	
<p>Realisierbarkeitsbedingung: Eingangsgröße und Ausgangsgröße begrenzt $x(\omega) < A \forall \omega y(\omega) < B \forall \omega$</p> <p>für große ω: $H(j\omega) \approx \frac{b_m (j\omega)^m}{a_n (j\omega)^n} = \frac{b_m}{a_n} \cdot (j\omega)^{m-n}$ $H(\omega) \approx \frac{b_m}{a_n} \cdot \omega^{m-n}$ wegen $y(\omega) = x(\omega) \cdot \frac{b_m}{a_n} \cdot \omega^{m-n}$ ist dies für alle ω nur möglich, wenn $m \leq n$</p>	
<p>Asymptotische Stabilität</p> <p>Ein lineares zeitinvariantes System ist dann asymptotisch stabil, wenn gilt: Die Eingangsgröße $x(t) = 0$ für $t > t_0$, dann muß die Ausgangsgröße $y(t)$ der Bedingung genügen:</p> $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$	
<p>Partialbruchzerlegung: r einfache, reelle Pole $2s$ konjugiert komplexe einfache Pole z reelle Doppelpole</p> $H(p) = H_{\infty} + \sum_{k=1}^r \frac{H_k}{(p - p_{\infty k})} + \sum_{g=1}^s \left(\frac{H_g}{(p - p_{\infty g})} + \frac{H_g^*}{(p - p_{\infty g}^*)} \right) + \sum_{e=1}^z \left(\frac{H_{e1}}{(p - p_{\infty e})} + \frac{H_{e2}}{(p - p_{\infty e})} \right)$ <p>mit $r + 2s + 2z = n$</p>	
<p>Rücktransformation:</p> $h(t) = H_{\infty} d(t) + s(t) \sum_{k=1}^r H_k e^{p_{\infty k} t} + s(t) \sum_{g=1}^s 2H_g e^{s_{\infty g} t} \cos(\omega_{\infty g} t + j_g) + s(t) \sum_{e=1}^z (H_{e1} e^{p_{\infty e} t} + H_{e2} e^{p_{\infty e} t})$	
<p>Asymptotische Stabilität ist dann gegeben, wenn der Realteil aller Pole negativ ist. $\text{Re}\{p_{\infty n}\} < 0 \forall n = 1..n$</p> <p>Bsp.: * reeller einfacher Pol im Ursprung: $p_{\infty 1} = 0$ liefert als Impulsantwort: $H_1 \cdot s(t)$ (Integrator) * konjugiert komplexes einfaches Polpaar auf imaginärer Achse liefert: Schwingung konstanter Amplitude (oszillatorische Instabilität)</p>	
<p>1. Hinweis: Dies gilt auch für die hier nicht angesprochenen Mehrfachpole 2. Hinweis: Stabilitätsgrenze $\text{Re}\{p_{\infty n}\} = 0$</p>	

Anfangsbedingung Systeme sind für $t = (-0)$ oft nicht energiefrei. Berücksichtigung durch Ersatzspannungs- oder -stromquelle

$I_c(p) = p \cdot C \cdot U_c(p) - C \cdot u_c(-0)$
 $U_c(p) = \frac{1}{p \cdot C} \cdot I_c(p) + \frac{u_c(-0)}{p}$

$i_c(t)$ $C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$ $C \cdot \delta(t) \cdot u_c(-0)$ $u_c(t)$
 $u_{cM}(t)$ $u_c(-0)s(t)$ $u_c(t)$
 Spg. am Modell-kondensator

$I_L(p) = \frac{1}{pL} \cdot U_L(p) + \frac{i_L(-0)}{p}$
 $U_L(p) = p \cdot L \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(-0)$

$i_{LM}(t)$ $i_L(-0)s(t)$ $i_L(t)$ $U_L(p)$ $L \cdot i_L(-0)\delta(t)$ $U_L(p)$
 Strom durch die ungeladen gedachte Modellinduktivität

Beispiel

1. Ersatzschaltbild:

$U_A(t) = U_{C0} \cdot s(t)$
 $X(p) = \frac{U_0}{p} \parallel U_A(p) = \frac{U_{C0}}{p}$
 $H_x(p) = \frac{U_{CM}(p)}{X(p)} = \frac{1}{1+pt}$
 $H_0(p) = \frac{U_{CM}(p)}{U_A(p)} = \frac{-1}{1+pt}$
 $U_{CM}(p) = H_x(p)X(p) + H_0(p)U_A(p) = \frac{1}{1+pt} \cdot \left(\frac{U_0}{p} - \frac{U_{C0}}{p} \right) = \frac{U_0 - U_{C0}}{p(1+pt)}$
 $y(t) = u_{CM}(t) + u_A(t) = s(t)(u_0 - u_{C0})(1 - e^{-t/\tau}) + s(t)u_{C0}$

2. Ersatzschaltbild:

$I_A(t) = C \cdot U_{C0} \cdot d(t)$
 $X(p) = \frac{U_0}{p} \parallel I_A(p) = C \cdot U_{C0}$
 $H_x(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1+pt}$
 $H_0(p) = \frac{Y(p)}{I_A(p)} = \frac{-R}{1+pt}$
 $Y(p) = H_x(p)X(p) + H_0(p)I_A(p) = \frac{1}{1+pt} + \frac{C \cdot U_{C0} \cdot (-R)}{1+pt}$
 $y(t) = U_0(t)s(t)(1 - e^{-t/\tau}) + s(t)U_{C0}e^{-t/\tau}$

Allpaßsysteme $|H(\omega)| = const, \forall \omega$

Bei einem Allpaß liegen Pole und Nullstellen symmetrisch zur imaginären Achse.

geg.: $H(p) \rightarrow$ Umwandlung $H(j\omega) \Rightarrow$ Betragbildung von Zähler und Nenner

Wegen Stabilität: $Re\{P_\infty\} < 0$
 $Re\{P_0\} > 0$

Bei einem stabilen Allpaß liegen die Nullstellen in der offenen rechten Halbebene

Abspaltung eines (versteckten) Allpaßanteils Nullstellen in der offenen rechten p-Halbebene gehören zu einem Allpaßanteil

Es sei:

$H(p) = \frac{Z_l(p) \cdot Z_r(p)}{N(p)}$
 $Z_l(p)$: Nullstellen in der abgeschlossenen linken p-Halbebene
 $Z_r(p)$: Nullstellen in der offenen rechten p-Halbebene
 $Z_r(-p)$: Nullstellen in der offenen linken p-Halbebene

Erweitern:

$H(p) = \frac{Z_l(p) \cdot Z_r(-p)}{H_m(p)} \cdot \frac{Z_r(p)}{H_A(p)}$
 $H_m(p)$: allpaßfreie „Rest“-System
 $H_A(p)$: Allpaß

Ermittlung von $H(j\omega)$ aus Pole- / Nullstellenverteilung

$H(j\omega) = \frac{b_m}{k} \cdot \frac{(j\omega - p_{01})(j\omega - p_{02}) \dots (j\omega - p_{0m})}{(j\omega - p_{\infty 1})(j\omega - p_{\infty 2}) \dots (j\omega - p_{\infty n})}$

d : bezeichnet die Länge des Pfeils von der Nullstelle zu einem festgelegten ω
 δ : bezeichnet den Winkel

$H(j\omega) = k \cdot \frac{d_{01} \cdot d_{02}}{d_{\infty 1} \cdot d_{\infty 2} \cdot d_{\infty 3}} \cdot e^{j(d_{01} + d_{02} - d_{\infty 1} - d_{\infty 2} - d_{\infty 3})}$
 $|H(\omega)|$

Für $\omega \geq 0$ können die einzelnen Winkelbeiträge zu $\varphi(\omega)$ in folgenden Bereichen liegen:

Nullstellen, reell, links:	0°.. 90°	↘ einschließl. imag. Achse
Nullstellenpaar, konj. Komplex, links:	0°.. 180°	↘
Pol, reell, links:	0°.. -90°	
Polpaar, konj. Komplex, links:	0°.. -180°	
Nullstelle, reell, rechts:	180°.. 90°	
Nullstellenpaar, konj. Komplex, rechts:	360°.. 180°	

Liegen Pole und Nullstellen ausschließlich in der linken abgeschlossenen p-Halbebene, so kann sich der Gesamtwinkel nur in dem Winkelbereich: $\varphi(\omega) = -n \cdot 90^\circ \dots + m \cdot 90^\circ$ liegen.

Für Nullstellen in der offenen rechten p-Halbebene kann der Gesamtwinkel dann auch außerhalb des minimal möglichen Winkelbereichs liegen.

Allpaßfreie Systeme heißen deshalb auch Phasenminimumsysteme oder minimalphasige Systeme. In allpaßfreien Systemen oder minimalphasigen Systemen $H_m(j\omega)$ sind Amplitudengang $|H_m(\omega)|$ und Phasengang $\varphi(\omega)$ eindeutig einander zugeordnet (bis auf den konstanten Faktor k).

Dann sind natürlich auch Realteil $R(\omega) = Re\{H(j\omega)\}$ und Imaginärteil $X(\omega) = Im\{H(j\omega)\}$ eindeutig einander zugeordnet.

Formelsammlung Informations- und Systemtheorie

Stochastische Signale		Versuchsergebnisse A_1 und A_2 statistisch voneinander unabhängig $\Rightarrow P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$		\sum bei diskreten (endlichen vielen) Zufallsgrößen
Wahrscheinlichkeit $\sum_n P(A_n) = 1$	Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$	Verteilungsdichtefunktion $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}; f(x) \geq 0$	$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$	
linearer Mittelwert $m_x = E(X) = \sum_n x_n \cdot p_n$ $m_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$	Quadratischer Mittelwert $q_x^2 = E(X^2) = \sum_n x_n^2 \cdot p_n$ $q_x^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx$	Varianz $s_x^2 = E((X - m_x)^2) = \sum_n (x_n - m_x)^2 \cdot p_n$ $s_x^2 = E((X - m_x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) \cdot dx$	Standardabweichung $s = +\sqrt{s^2}$ Es gilt: $s^2 = q_x^2 - m_x^2$	
Verbundverteilungsfunktion $F((x, y) < x) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$	Verbundverteilungsdichtefunktion $f(x, y) = \frac{\iint F(x, y)}{\iint xy}$ $F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot dv \cdot du$	Die zugehörigen eindimensionalen Randverteilungen sind: $F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot dv \cdot du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot du$ $F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \cdot dv \cdot du = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot dv$	Sind die Zufallsgrößen X und Y stochastisch unabhängig $F(x, y) = F(x) \cdot F(y)$ $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$	
Erwartungswerte bei Verbundverteilung		Kovarianz		
Summationsmittelwert $E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = m_x + m_y$	Produktmittelwert $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$ $E(X \cdot Y) = \sum_m \sum_n x_m \cdot y_n \cdot p_{mn}$	$c_{xy} = E((X - m_x) \cdot (Y - m_y))$ $c_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) \cdot f(x, y) dx dy$ $c_{xy} = \sum_m \sum_n (x_m - m_x) \cdot (y_n - m_y) \cdot p_{mn}$		
kontinuierlicher Fall: $c_{xy} = E(X \cdot Y) - m_x \cdot E(Y) - m_y \cdot E(X) + m_x \cdot m_y$ $c_{xy} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$ im Falle der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y wird die Kovarianz $c_{xy} = 0$		Varianz $s_{x+y}^2 = E((X - m_x + Y - m_y)^2) = E((X - m_x)^2) + E((Y - m_y)^2) + 2E((X - m_x)(Y - m_y))$ $s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2 \cdot c_{xy}$		
		Orthogonalität 2 Zufallsvariablen heißen orthogonal, wenn gilt: $E(X \cdot Y) = 0$		
		$q_x^2(t_1) = E(X^2(t_1)) = \sum_n x_n^2 p_n(t_1)$ $c_{xy}(t_1, t_2) = E((X(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_y(t_2)))$ $c_{xx}(t_1, t_2) = E((X(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (X(t_2) - m_x(t_2)))$		
Stochastische Prozesse		Autokorrelationsfunktion AKF		
Ereignismenge = n Meßwerte zu einem festen Zeitpunkt t_1 $m_x(t_1) = E(X(t_1)) = \sum_n x_n p_n(t_1)$ $m_x(t_1) = E(X(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t_1) dx$		$q_x^2(t_1) = E(X^2(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, t_1) dx$ $s_x^2(t_1) = E(X(t_1) - m_x(t_1))^2$ $E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = r_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot f(x(t_1), x(t_2)) dx(t_1) dx(t_2)$		
linearer und quadratischer Mittelwert eines ergodischen Prozesses		* $t_1 = t_2$ $E[X(t_1)X(t_2)] = E[x^2(t_1)] = q_x^2$ Höchstmögliche statistische Abhängigkeit zwischen $x(t_1)$ und $x(t_2)$ * liegen t_1 und t_2 sehr weit auseinander, wird die statistische Abhängigkeit geringer. Für $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$ wird statistische Unabhängigkeit erwartet $r_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)] \cdot E[X(t_2)] = m_x(t_1) \cdot m_x(t_2)$		
$m_x = E(X(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t_1) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \overline{x(t)}$ $q_x^2 = E(X^2(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, t_1) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \overline{x^2(t)}$		Eigenschaften des AKF 1) $r_{xx}(t=0) = \overline{x^2(t)}$ 2) $r_{xx}(t) = r_{xx}(-t)$ gerade Funktion 3) $r_{xx}(t=0) \geq r_{xx}(t) $ 4) Enthält $x(t)$ keine deterministischen (vorhersehbaren), periodischen Anteile, so wird für $\tau \rightarrow \infty$ $r_{xx}(t) = \overline{x(t)^2}$		
Stationäre Prozesse (alle statistischen Eigenschaften ändern sich nicht durch eine beliebige zeitlich Verschiebung des Prozesses)				
$r_{xx}(t_1, t_2) = r_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+t) dt$				
Kreuzkorrelationsfunktion KKF		Eigenschaften der KKF:		
$r_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t-t) dt$	1) Schiefsymmetrie: $r_{xy}(t) = -r_{yx}(-t)$ $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t-t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) x(t-t) dt$			
Ensemblemittelwert $r_{xy}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot Y(t_2))$	2) $r_{xy}(0) = \overline{x(t)y(t)}$ Produktmittelwert; $r_{xy}(0)$ ist nicht zwangsläufig Maximalwert			
stationäre Prozesse $r_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(t); t = t_2 - t_1$	3) wenn $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert sind: $r_{xy}(t) = E(X(t_1) \cdot Y(t_2)) = E(X(t_1)) \cdot E(Y(t_2)) = m_x \cdot m_y$			
	bei ergodischen Prozessen: $r_{xy}(t) = \overline{x(t) \cdot y(t)}$			

Eigenschaften der KKF:

4) Enthalten $x(t)$ und $y(t)$ keine periodischen Anteile, dann werden $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert sein für $\tau \rightarrow \infty$ $r_{xy}(\tau \rightarrow \infty) = \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}$

5) $|r_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}(\overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)})$

Bsp.: $x(t) = S_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ $n(t) = \text{Rauschen}$ $y(t) = x(t) + n(t)$

KKF mit Musterfunktion $u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)$

$r_{xx}(t) = \frac{S_0^2}{2} \cos(\omega t)$ $r_{yu}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) + n(t)) \cdot u(t + \tau) dt = r_{xu}(t) + r_{nu}(t)$

Da $u(t)$ und $n(t)$ unkorreliert $\Rightarrow r_{nu}(t) = \overline{n(t)} \cdot \overline{u(t)} = 0$

$r_{yu}(t) = r_{xu}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S_0 \sin(\omega_0 t + j) \cdot U_0 \sin(\omega_0 t) dt$

$r_{yu}(t) = \frac{S_0 \cdot U_0}{2} \cos(\omega_0 t - j)$

Spektraldarstellung stochastischer Prozesse (Leistungsdichtespektrum)

a) AKF: Wiener-Khinchine-Transformation physikalische Betrachtung: $\tau = 0$ $r_{xx}(0) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \Rightarrow S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$

$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$

$X_T(j\omega) = F\{x_T(t)\}$

Eigenschaften:
 $S_{xx}(\omega) \geq 0$
 $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$

$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$

mit $x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$S_{xx}(\omega)\Delta\omega =$ mittlere Leistung im Intervall $(\omega, \omega + \Delta\omega)$

$r_{xx}(0) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega =$ Gesamtleistung des stochastischen Prozesses

bei Effektivwertberechnung ist $\tau = 0 \Rightarrow$

b) $S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$ $r_{xy}(\tau) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$

Eigenschaften:
 $S_{xy}(j\omega) = S_{xy}^*(j\omega) = S_{yx}(-j\omega)$

Beispiele:

1) weißes Rauschen
 $S_{xx}(\omega) = S_0 = \text{Konstant}$
 $r_{xx}(\tau) = S_0 \cdot \delta(\tau)$
 $m_x = 0$

2) farbiges Rauschen (bandbegrenzte Rauschen)

$S_{xx}(\omega) = S_0 \left(\text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right) \right)$ $r_{xx}(t) = S_0 \cdot \frac{\Delta\omega}{2p} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \cdot 2 \cos(\omega_0 t)$

3) tiefpaßbegrenztes Rauschen (Markhoff'scher Prozess)

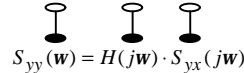
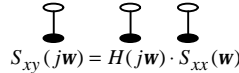
$S_{xx}(\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega \cdot T)^2}$ $r_{xx}(t) = \frac{S_0}{2 \cdot T} \cdot e^{-\frac{|t|}{T}}$

Übertragung der linearen Mittelwerte

$r_{xy}(t) = h(t) * r_{xx}(t)$

$r_{yy}(t) = h(t) * r_{yx}(t)$

$m_y = m_x \cdot H(0)$
 Wie hängt r_{yy} von r_{xx} ab?



$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx}(\omega)$

Beispiele: 1) idealer Tiefpaß

$S_{xx}(\omega) = 0$
 $|H(\omega)| = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_g}\right) \cdot H_0$

$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$
 $S_{yy}(\omega) = S_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_g}\right) \cdot H_0^2$

AKF:

$r_{yy}(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} S_0 \cdot H_0^2 \cdot e^{j\omega t} d\omega$
 $r_{yy}(0) = Y_{eff}^2 = \frac{S_0 \cdot H_0^2 \cdot \omega_g}{p}$

$Y_{eff} = H_0 \cdot \sqrt{\frac{S_0 \cdot \omega_g}{p}}$

2) idealer Bandpaß

$S_{xx}(\omega) = \text{beliebig}$
 $|H(\omega)| = \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right)$
 $S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

$r_{yy}(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{-\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} S_{xx}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2p} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} S_{xx}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

$r_{yy}(0) = Y_{eff}^2 = \frac{\Delta\omega}{p} \cdot S_{xx}(\omega_0)$

$S_{xx}(\omega_0) = \frac{Y_{eff}^2 \cdot p}{\Delta\omega}$

$\Delta\omega$ ist so klein, daß $S_{xx}(\omega) \approx S_{xx}(\omega_0)$ für $-\Delta\omega/2 < \omega < \Delta\omega/2$

2.1) Folgebeispiel zu 2)

$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$ $S_{yy}(\omega) = S_0 \cdot |H_U(\omega)|^2 \cdot |H_{BP}(\omega)|^2$ $Y_{eff}^2 = \frac{\Delta\omega}{p} \cdot S_0 \cdot |H_U(\omega)|^2$ $|H_U(\omega)| = \sqrt{\frac{Y_{eff}^2 \cdot p}{\Delta\omega \cdot S_0}}$ $H_U(\omega) = \text{unbekanntes H}$
 $H_{BP}(\omega) = H$ von Bandpaß

3) weißes Rauschen

$r_{xx}(t) = S_0 \cdot \delta(t)$ $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ $T = RC$ $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 \cdot T^2}$ $S_{yy}(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2 \cdot T^2}$ $r_{yy}(t) = \frac{S_0}{2 \cdot T} e^{-\frac{|t|}{T}}$ $r_{yy}(0) = Y_{eff}^2 = \frac{S_0}{2 \cdot T}$

4) $x(t) = X_0 \cdot \sin(\omega_0 t + j)$

$r_{xx}(t) = \frac{X_0^2}{2} \cdot \cos(\omega_0 t)$

$S_{xx}(\omega) = p \cdot \frac{X_0^2}{2} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$

$S_{yy}(\omega) = 2 \cdot p \cdot Y_0^2 \cdot \delta(\omega)$

Gleichsignal: $y(t) = Y_0$

$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_0^2}{2} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

$r_{yy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \cdot y(t + \tau) dt$

5) KKF

$$r_{xy}(t) = s(t) \cdot \frac{2 \cdot S_0}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \left| \quad S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \cdot S_0}{T} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)t} dt = \frac{2 \cdot S_0}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \cdot e^{-\left(\frac{1}{T} + j\omega\right)t} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{2 \cdot S_0}{1 + j\omega T}$$

$$S_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot S_{xx}(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{2 \cdot S_0}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1}{S_0} = \frac{2}{1 + j\omega T}$$

$e^{j0} = e^{j0^\circ} = 1$ $e^{j\pi} = e^{j180^\circ} = -1$ H(jω) Betragbildung bedeutet Entfernung der Elemente mit j.
 $e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90^\circ} = j$ $e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{j270^\circ} = -j$

Systemreaktion von Systemen mit einem Energiespeicher

$$G(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{b_0 + j\omega} \quad h(t) = a_1 \cdot d(t) + s(t) \cdot (a_0 - a_1 \cdot b_0) e^{-b_0 t}$$

$b_0 > 0$, sonst System instabil $a(t) = s(t) \cdot \frac{a_0}{b_0} - s(t) \cdot \frac{a_0 - a_1 b_0}{b_0} e^{-b_0 t}$

Systemreaktion von Systemen mit zwei Energiespeichern

$$G(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + (j\omega)^2} \quad b_0 > 0, b_1 > 0, \text{sonst System instabil}$$

$$A_1 = \frac{c_0 + c_1 p_1}{p_1 - p_2} \quad A_2 = \frac{c_0 + c_1 p_2}{p_2 - p_1}$$

$$p_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0} \quad c_0 = a_0 - a_2 b_0 \quad c_1 = a_1 - a_2 b_1$$

$$h(t) = a_2 \cdot d(t) + A_1 \cdot s(t) \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot s(t) \cdot e^{p_2 t}$$

$$a(t) = s(t) \cdot \left(a_2 + \frac{A_1}{p_1} \cdot (e^{p_1 t} - 1) + \frac{A_2}{p_2} \cdot (e^{p_2 t} - 1) \right)$$

Übertragungsfunktion ⇒ Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{2 \cdot p} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

DGL ⇔ Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 \cdot j\omega + a_2 \cdot (j\omega)^2}{b_0 + b_1 \cdot j\omega + b_2 \cdot (j\omega)^2}$$

$$b_0 \cdot y(t) + b_1 \cdot \dot{y}(t) + b_2 \cdot \ddot{y}(t) = a_0 \cdot x(t) + a_1 \cdot \dot{x}(t) + a_2 \cdot \ddot{x}(t)$$

Faltung: $x(t) = s(t+T) - s(t-T)$; $h(t) = s(t) \cdot \{ \dots \}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t) \cdot g(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s(t+T-t) - s(t-T-t)) \cdot s(t) \cdot \{ \dots \} dt$$

⇒ $s(t+T) \cdot \int_0^{t+T} \dots - s(t-T) \cdot \int_0^{t-T} \dots$

τ fällt weg, und gibt die obere Integrationsgrenze an

setzt die untere Integrationsgrenze auf 0

Periodische Quellen

$$X_P(p) = \frac{X_0(p)}{1 - e^{-pT}}$$

$$x(t) = s(t) \cdot \sin\left(\frac{p \cdot t}{T}\right) + s(t-T) \cdot \sin\left(\frac{p \cdot (t-T)}{T}\right)$$

$$u(t) = s(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$U(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{pC}}$$

Induktivitäten: Spannung: $u_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ Strom: $i_L = \frac{1}{L} \cdot \int u(t) \cdot dt$

Kapazitäten: Spannung: $u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$ Strom: $i_C = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$

Verbundverteilungsfunktion

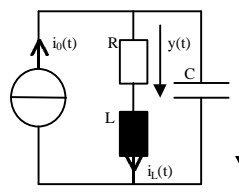
reelles System:
 Betrag = Achsensymmetrisch
 Phase = Punktsymmetrisch

Erwartungswert: $E(x+y) = E(x) + E(y) = m_x + m_y$

$$m_x = 1 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5}$$

$$m_y = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5}$$

	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
5	0	3/25	3/25	6/25	12/25	3/5
4	0	3/25	3/25	6/25	12/25	3/5
3	0	3/25	3/25	6/25	12/25	3/5
2	0	2/25	2/25	4/25	8/25	2/5
1	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	

<p>Ideale Übertragungssysteme</p> $H(j\omega) = e^{-[A(\omega) + jB(\omega)]} = e^{-A(\omega)} \cdot e^{-jB(\omega)}$ $ H(j\omega) = e^{-A(\omega)} \quad \left e^{-jB(\omega)} \right = 1$ <p>$H(j\omega)$ = gerade Funktion $B(\omega)$ = ungerade Funktion $\Rightarrow A(\omega) = A(-\omega)$ $B(\omega) = -\arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -B(-\omega)$</p>	<p>$A(\omega)$ = Dämpfung $B(\omega)$ = Phase</p> <p>verzerrungsfreie Übertragung $y(t)$ erhält man, wenn man $x(t)$ um t_0 nach rechts verschiebt und mit einer Konstanten K</p> $y(t) = K \cdot x(t - t_0) \quad \text{wenn} \quad x(t) = d(t) \quad \Rightarrow h(t) = K \cdot d(t - t_0)$ $H(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_0}$ <p>mit $H(j\omega) = e^{-A(\omega)} \cdot e^{-jB(\omega)} = K \cdot e^{-j\omega t_0}$ $\Rightarrow A(\omega) = -\ln K; B(\omega) = \omega \cdot t_0$</p>	
<p>Zustandsraum</p>  <p>Eingangsgröße: $u(t) = i_0(t)$ Kenngröße C: $x_1(t) = u_c(t)$ Kenngröße L: $x_2(t) = i_L(t)$ Ausgangsgröße: $y(t) = u_R(t)$</p> <p>Knoten: $u(t) = x_2(t) + C \cdot \dot{x}_1(t)$ Masche: $R \cdot x_2(t) + L \cdot \dot{x}_2(t) - x_1(t) = 0$</p>	$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{C} \cdot x_2(t) + \frac{1}{C} \cdot u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{L} \cdot x_1(t) - \frac{R}{L} \cdot x_2(t) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ $y(t) = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

LÖSUNG DER DGL N-TER ORDNUNG

n = 1:

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL = allgemeine Lösung der homogenen DGL + spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Eine Lösung der homogenen DGL findet man durch Separation.

$y = c \cdot e^{-ax}$

Bei n = 1 ist dies die allgemeine Lösung der homogenen DGL

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten.

$y' + ay = h(x)$

Ansatz:

$y(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ \Leftarrow einsetzen in inhomogene DGL

ANSATZ VOM TYP DER RECHTEN SEITE

n = 2:

$y_h = e^{\lambda x}$

Bei n = 2 ist dies die allgemeine Lösung der homogenen DGL

3 unterschiedliche Lösungsansätze für die homogene DGL.

λ ist Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, d. h. bei $y'' + ay' + by = 0$ wird y'' durch λ^2 , y' durch λ und y durch nichts ersetzt. Nach Umformen mit λ Lösung der quadratischen Gleichung.

Lösung der charakteristischen Gleichung	Basis des Lösungsvektorraums von $y'' + ay' + by = 0$	
	$y_1(x)$	$y_2(x)$
a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 x}$	$x e^{\lambda_1 x}$
c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \beta \neq 0$	$e^{\alpha x} \cos \beta x$	$e^{\alpha x} \sin \beta x$